1. На горизонтальной подставке лежит груз, прикрепленный к потолку вертикальной нерастянутой пружиной. Подставка начинает опускаться вниз с постоянным ускорением $a = 2\,g/5$, g — ускорение свободного падения. Найдите, за какой промежуток времени τ после отрыва груза от подставки пружина растянется на максимальную длину. Известен период T свободных колебаний груза на пружине.

Решение

Рассмотрим сначала движение груза вместе с подставкой. Направим ось x вниз и будем отсчитывать координату груза от начального положения, в котором пружина не растянута. За начало отсчёта времени выберем момент начала движения. Запишем для груза второй закон Ньютона в проекции на ось x:

$$ma = mg - kx - N\,,$$

m — масса груза, k — жёсткость пружины, N — сила нормальной реакции, лействующая со стороны подставки. Пусть x_0 — координата груза в момент отрыва от подставки. Учитывая, что в этот момент сила N обращается в нуль, получаем:

$$ma = mg - k\,x_0 \quad\longrightarrow\quad x_0 = \frac{m}{k}\,(\,g - a\,) = \frac{g-a}{\omega^2}\,,$$

$\omega = \sqrt{k/m}$ — частота свободных колебаний груза на пружине. Найдём скорость V_0, которую имеет груз в момент отрыва:

$$V_0 = a\,t\,,\quad x_0 = \frac{a\,t^2}{2} \quad\longrightarrow\quad x_0 = \frac{V_0^2}{2\,a} \quad\longrightarrow\quad V_0 = \sqrt{2a\,x_0} = \frac{\sqrt{2a\,(\,g-a\,)}}{\omega}\,.$$

После отрыва груз совершает гармонические колебания с частотой ω. Найдём координату положения равновесия x_p:

$$k\,x_p = mg \quad\longrightarrow\quad x_p = \frac{mg}{k} = \frac{g}{\omega^2}\,.$$

Для описания колебаний введём новую координату y, отсчитанную от положения равновесия:

$$y = x - x_p\,.$$

Время будем отсчитывать от момента отрыва. Начальное значение координаты y равно:

$$y_0 = x_0 - x_p = \frac{g-a}{\omega^2} - \frac{g}{\omega^2} = -\frac{a}{\omega^2}\,.$$

Начальная скорость груза равна V_0. Зависимости от времени координаты и скорости груза при колебаниях определяются соотношениями:

$$\begin{aligned} y &= A\sin(\,\omega\,t + \varphi\,)\,, \\ V_y &= \omega\,A\cos(\,\omega\,t + \varphi\,)\,, \end{aligned}$$

A — амплитуда колебаний (положительная величина), φ — начальная фаза. Полагая $t = 0$, получаем:

$$\begin{aligned} y_0 &= A\sin\varphi\,, \\ V_0 &= \omega\,A\cos\varphi\,. \end{aligned}$$

Так как $y_0 < 0$, то угол φ лежит в четвёртой четверти. Выразим его через арктангенс:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega\, y_0}{V_0} = -\frac{a}{\sqrt{2a\,(\,g-a\,)}} = -\sqrt{\frac{a}{2\,(\,g-a\,)}} \quad \longrightarrow \quad \varphi = -\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{2\,(\,g-a\,)}}\,.$$

В момент времени τ, когда пружина растянута на максимальную длину, скорость груза обращается в нуль:

$$V_y = 0 \quad \longrightarrow \quad \cos(\,\omega\,\tau + \varphi\,) = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega\,\tau + \varphi = \frac{\pi}{2} \quad \longrightarrow \quad \tau = \frac{1}{\omega}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right).$$

Полагая $\omega = 2\pi/T$, получаем:

$$\tau = \frac{T}{2\,\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \frac{T}{4} + \frac{T}{2\,\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{2\,(\,g-a\,)}}\,.$$

Этот результат можно получить по-другому, представив τ виде:

$$\tau = \tau\,' + \frac{T}{4}\,,$$

где $\tau\,'$ — время движения от момента отрыва до положения равновесия, $T/4$ — время движения от положения равновесия до момента максимального удлинения пружины. Для $\tau\,'$ имеем:

$$y = 0 \quad \longrightarrow \quad \sin(\,\omega\,\tau\,' + \varphi\,) = 0 \quad \longrightarrow \quad \omega\,\tau\,' + \varphi = 0 \quad \longrightarrow \quad \tau\,' = -\frac{\varphi}{\omega} = \frac{T}{2\,\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{2\,(\,g-a\,)}}\,.$$

При $a = 2\,g/5$ результат для τ упрощается:

$$\tau = \frac{T}{4} + \frac{T}{2\,\pi}\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{T}{4} + \frac{T}{2\,\pi}\cdot\frac{\pi}{6} = \frac{T}{3}$$

Ответ:

$$\tau = \frac{T}{4} + \frac{T}{2\,\pi}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a}{2\,(\,g-a\,)}} = \frac{T}{3}$$

Критерии

1. Записан II закон Ньютона для груза m и найдена координата груза m в момент отрыва от подставки (+2 балла).

2. Записаны кинематические уравнения для груза m в момент отрыва и найдена скорость V_0 (+1 балл).

3. Записаны зависимости от времени координаты и скорости груза при колебаниях и их уравнения в момент отрыва (+2 балла).

4. Написано уравнение для начальной фазы ϕ и посчитано её значение (+3 балла).

5. Записано условие максимального растяжения пружины при $V_y = 0$ в момент времени τ и получен правильный ответ (+2 балла).

   ИЛИ

   Найдено время движения от момента отрыва и до положения равновесия и время движения от положения равновесия до момента максимального удлинения пружины получен правильный ответ (+2 балла).

2. На льду стоит ящик, две противоположные стенки которого скреплены жёстким горизонтальным стержнем. По стержню может скользить, не касаясь дна ящика, муфта, соединённая пружинами с концами стержня. Сначала ящик и муфта неподвижны, пружины не деформированы. Коротким ударом ящику сообщают некоторую скорость в направлении стержня. Найдите отношение x минимальной и максимальной скоростей ящика при движении. Известно отношение α массы ящика к массе муфты: $\alpha = 9$. Считайте, что за время удара пружины не успевают деформироваться. Массами стержня и пружин, а также трением пренебрегите.

Решение

Пусть V_0 – начальная скорость ящика. Запишем закон сохранения импульса в проекции на направление V_0:

$$MV_0 = MV_1 + mV_2\,,$$

M – масса ящика, m – масса муфты, V_1 и V_2 – проекции скоростей ящика и муфты. Скорость ящика достигает своих экстремальных значений в те моменты времени, когда его ускорение обращается в нуль, т.е. когда пружины не деформированы. Запишем закон сохранения энергии для этого случая:

$$\frac{MV_0^2}{2} = \frac{MV_1^2}{2} + \frac{mV_2^2}{2}\,.$$

Поделив оба уравнения на m и введя отношение масс $\alpha = M/m$, получаем:

$$\begin{aligned} \alpha\, V_0 &= \alpha\, V_1 + V_2\,, \\ \alpha\, V_0^2 &= \alpha\, V_1^2 + V_2^2\,. \end{aligned}$$

Перепишем эти уравнения так:

$$\begin{aligned} \alpha\,(\,V_0 - V_1\,) &= V_2\,, \\ \alpha\,(\,V_0^2 - V_1^2\,) &= V_2^2\,. \end{aligned}$$

Исключая отсюда V_2, получаем уравнение для V_1:

$$\alpha\,(\,V_0^2 - V_1^2\,) = \alpha^2\,(\,V_0 - V_1\,)^2 \quad \longrightarrow \quad (\,V_0 - V_1\,)\,(\,\alpha\,(\,V_0 - V_1\,) - (\,V_0 + V_1\,)\,) = 0\,.$$

Уравнение имеет два корня, которые определяют максимальную и минимальную скорости ящика:

$$V_{max} = V_0\,, \quad V_{min} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\,V_0\,.$$

Отношение x этих скоростей равно:

$$x = \frac{V_{min}}{V_{max}} = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = 0,8$$

Ответ:

$$x = \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1} = 0,8$$

Критерии

1. Верно записан закон сохранения энергии (+3 балла).
2. Указано, что скорость максимальная/минимальна в те моменты, когда пружина недеформирована (+2 балла).
3. Верно записан закон сохранения энергии (+3 балла).
4. Получен ответ (+2 балла).

3. Горизонтальный цилиндр закрыт свободно скользящим поршнем. В цилиндре находится водяной пар при температуре $T_1 = 453$ К и давлении $2P_0$, $P_0 = 0,1$ МПа . Пар изохорически охлаждают до температуры $T_2 = 373$ К , а затем изотермически уменьшают его объём в 2 раза. При этом внешние силы, действующие на поршень, совершают работу $A = 450$ Дж . Найдите массу m сконденсировавшейся воды. Давление насыщенного пара при температурах T_1 и T_2 равно соответственно $10\,P_0$ и P_0 , молярная масса воды $\mu = 18$ г/моль , универсальная газовая постоянная $R = 8,31$ Дж/(моль К) . Объёмом воды по сравнению с объёмом пара пренебрегите, пар считайте идеальным газом. Ответ выразите в граммах и округлите до целого.

Решение

Рассмотрим изотермы пара на диаграмме (P, V) . При температурах ниже критической (647 К для воды) на изотермах имеются горизонтальные участки постоянного давления, соответствующие насыщенному пару. Давление на этих участках при температурах T_1 и T_2 равно соответственно $10\,P_0$ и P_0 . Так как начальное давление $2P_0$ меньше чем $10\,P_0$, то в начальном состоянии имеем ненасыщенный пар. Пусть ν_1 – число молей пара, V_1 – его объём. Тогда:

$$2P_0\,V_1 = \nu_1 R\,T_1\,.$$

Выясним, будет ли пар насыщенным после изохорического охлаждения. Обозначим через $V_{\text{н}}$ максимальный объём, который могут занимать ν_1 молей насыщенного пара при температуре T_2 . Учитывая, что давление насыщенного пара при этой температуре равно P_0 , имеем:

$$P_0\,V_{\text{н}} = \nu_1 R\,T_2\,.$$

Поделив первое уравнение на второе, получаем:

$$\frac{2\,V_1}{V_{\text{н}}} = \frac{T_1}{T_2} \quad \longrightarrow \quad \frac{V_1}{V_{\text{н}}} = \frac{T_1}{2\,T_2} \approx 0,6$$

Так как $V_1 < V_{\text{н}}$, то после изохорического охлаждения пар становится насыщенным. Точка, изображающая его состояние на диаграмме (P, V), лежит на горизонтальном участке изотермы T_2 . Поэтому дальнейшее изотермическое сжатие пара идёт при постоянном давлении P_0 и работа внешних сил легко вычисляется:

$$A = P_0\left(V_1 - \frac{V_1}{2}\right) = \frac{P_0\,V_1}{2} \quad \longrightarrow \quad P_0\,V_1 = 2A\,.$$

Пусть ν – число молей сконденсировавшейся воды. Тогда число молей пара в конечном состоянии равно ($\nu_1 - \nu$) . Пренебрегая объёмом воды по сравнению с объёмом пара, получаем:

$$P_0\,\frac{V_1}{2} = (\,\nu_1 - \nu\,)R\,T_2 \quad \longrightarrow \quad \nu = \nu_1 - \frac{P_0\,V_1}{2\,R\,T_2} = \nu_1 - \frac{A}{R\,T_2}\,.$$

Начальное число молей пара равно:

$$\nu_1 = \frac{2P_0\,V_1}{R\,T_1} = \frac{4A}{R\,T_1}\,.$$

Масса m сконденсировавшейся воды равна:

$$m = \mu \, \nu = \mu \left(\frac{4A}{R \, T_1} - \frac{A}{R \, T_2} \right) = \frac{\mu \, A \, (\, 4 \, T_2 - T_1 \,)}{R \, T_1 \, T_2} \, .$$

Подставим числовые значения:

$$m = \frac{0,018 \cdot 450 \cdot (\, 4 \cdot 373 - 453 \,)}{8,31 \cdot 453 \cdot 373} = 0,006 \text{ кг} = 6 \text{ г}$$

Ответ:

$$m = \frac{\mu \, A \, (\, 4 \, T_2 - T_1 \,)}{R \, T_1 \, T_2} = 6 \text{ г}$$

Критерии

1. Верно записано уравнение состояния идеального газа для начального состояния (+2 балла).
2. Верно записано уравнение состояния идеального газа после изохорического охлаждения (+3 балла).
3. Определено выражение для работы внешних сил при изотермическом сжатии (+3 балла).
4. Найдено количество сконденсировавшейся воды (+2 балла).

Задача 4. Расположите 4 заряда величины $+q$ и 4 заряда величины $-q$ в вершинах куба со стороной a, таким образом, чтобы энергия электростатического взаимодействия всех зарядов была минимальной. Найдите величину этой энергии.

Возможное решение. Энергия электростатического взаимодействия представляет собой сумму всех энергий попарных взаимодействий. В кубе все заряды могут находиться друг от друга на расстоянии a (ближайшие соседи, вдоль ребра), $\sqrt{2a}$ (по диагоналям граней куба), $\sqrt{3a}$ (диаметрально противоположные точки). Обозначим их соседями первого, второго, и третьего типа соответственно. Нетрудно заметить, что соседей первого типа — 12, второго — 12, третьего — 4. Энергия взаимодействия каждой пары:

$W_1 = \pm\frac{kq^2}{a}$; $W_2 = \pm\frac{kq^2}{\sqrt{2a}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}W_1$; $W_3 = \pm\frac{kq^2}{\sqrt{3a}} = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}W_1$.

Нетрудно догадаться, что для того чтобы минимизировать общую энергию надо создать как можно больше разноименных соседей первого типа. Существует конфигурация, где все соседи первого типа — разноименные, например ячейка кристаллической решетки NaCl:

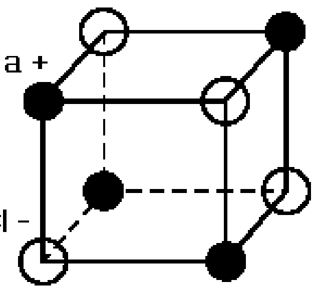


Рис. к задаче 4

У такой решетки все соседи второго типа одноимённые, а третьего — разноименные. Тогда энергия равна:

$W = -12W_1 + 12W_2 - 4W_3 = W_1(-12 + \frac{12}{\sqrt{2}} - \frac{4}{\sqrt{3}}) \simeq -5{,}82W_1$

Эта энергия является минимальной.

В силу высокой симметрии куба, расстановок зарядов в вершинах, не переводимых друг в друга вращениями и зеркальными отображениями не так много. Все они получаются из перестановок зарядов вышеуказанной конфигурации вдоль вертикальных ребер (т.е. перестановка заряда из верхней грани с его соседом снизу). **Необходимо доказать**, что данная конфигурация обладает наименьшей энергией. Допускается обоснованный перебор вариантов.

Также доказать, данная энергия минимальна можно исходя из оценки энергии одного заряда.

Возьмем произвольный заряд $+q$. Для того, чтобы минимизировать его энергию будем располагать заряды следующим образом: заряды $-q$ расположим в качестве ближайших соседей (3 шт.), еще один $-q$ будет соседом второго типа, 4 заряда $+q$ займут оставшиеся места. Такое расположение отличается от оптимального ровно одной перестановкой, и энергия всей системы в данном случае будет больше, т.к. энергии всех остальных зарядов сильно вырастут, засчет большого количества однойменных соседей первого типа.

Ключевая особенность расположения: минимум энергии системы не соответствует минимуму для каждого заряда.

Критерии

1. Верное решение — 10 баллов.

2. Представлена верная конфигурация зарядов, но допущены ошибки при расчете минимальной энергии электростатического взаимодействия или есть некорректность в обосновании верной конфигурации зарядов — 8 – 9 баллов.

3. Представлена верная конфигурация зарядов (без обоснования) и получен правильный ответ — 7 баллов.

4. Представлена и обоснована только верная конфигурация зарядов — 6 баллов.

5. Представлена верная конфигурация зарядов, но присутствуют ошибки в уравнении для минимальной энергии электростатического взаимодействия или есть верные шаги в обосновании верной конфигурации зарядов — 3 – 6 баллов.

6. Предсатвлена верная конфигурация зарядов без обоснования — 2 балла.

Задача 5. В электрической схеме, показанной на рисунке, в начальный момент времени все конденсаторы разряжены. Ключ К сначала переводят в положение 1, затем, подождав достаточное количество времени для полной зарядки конденсаторов переключают в положение 2. Найдите:

а) количество теплоты Q_1, выделившееся в цепи за то время, пока ключ был в положении 1.

б) количество теплоты Q_2, выделившееся в цепи за то время, пока ключ был в положении 2.

в) заряд, протекший через ключ К в положении 2.

Величины, указанные на рисунке считать известными.

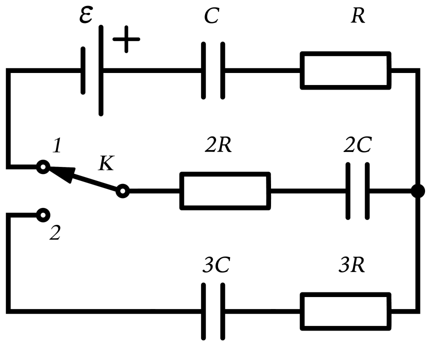


Рис. к задаче 5

Возможное решение.

а) После замыкания ключа в положении 1, конденсаторы зарядятся.

Обозначим заряды на конденсаторах как показано на рисунке 5.1:

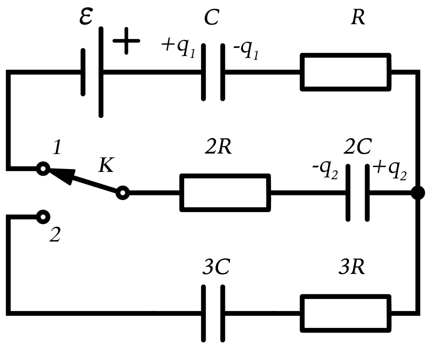


Рис. 5.1

Конденсаторы C и $2C$ в этом случае соединены последовательно, поэтому $q_1 = q_2 = q$.

Для цепи можно записать уравнение:

$$\mathcal{E} = \frac{q}{C} + \frac{q}{2C}, \text{ откуда } q = \frac{2}{3}c\mathcal{E}$$

Работа ЭДС пойдет на приращение энергии конденсаторов и на выделение тепла на резисторах.

$$\mathcal{E}q = \frac{q^2}{2C} + \frac{q^2}{2 \cdot 2C} + Q_1$$

Тогда

$$Q_1 = \frac{2}{3}C\mathcal{E}^2 - \frac{3}{2}\frac{(2/3C\mathcal{E})^2}{2C} = \frac{1}{3}C\mathcal{E}^2$$

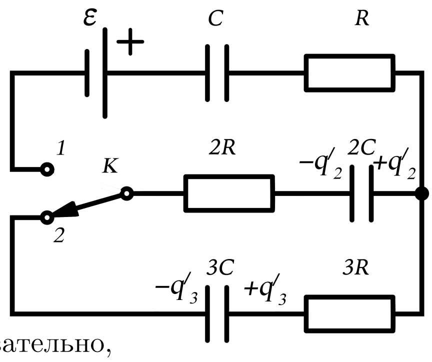


Рис. 5.2

б) При переключении ключа K в положение 2 пойдет процесс перезарядки конденсаторов с выделением тепла на резисторах. В данном случае конденсаторы 2С и 3С не будут соединены последовательно, т.к. на конденсаторе 2С перед переключением был заряд.

Обозначим новые заряды на конденсаторах как показано на рисунке 5.2.

Из закона сохранения заряда: $q = q_2 = q_2' + q_3'$. Ток прекратится, когда на конденсаторах выровняются потенциалы: $q_2'/2C = q_3'/3C$. Тогда $q_2' = \frac{2}{5}q = \frac{4}{15}C\mathcal{E}$

$q_3' = \frac{3}{5}q = \frac{2}{5}C\mathcal{E}$

Энергия, запасенная в конденсаторе 2С, перераспределится между конденсаторами 2С и 3С, часть уйдет в тепло:

$$\frac{q_2^2}{2 \cdot 2C} = \frac{q_2'^2}{2 \cdot 2C} + \frac{q_3'^2}{2 \cdot 3C} + Q_2$$

$$Q_2 = \frac{1}{15}C\mathcal{E}$$

в) Заряд, протекший через ключ после переключения в положение 2:

$$\Delta q = |q_2 - q_2'| = |q_3'| = \frac{2}{5}C\mathcal{E}$$

Критерии

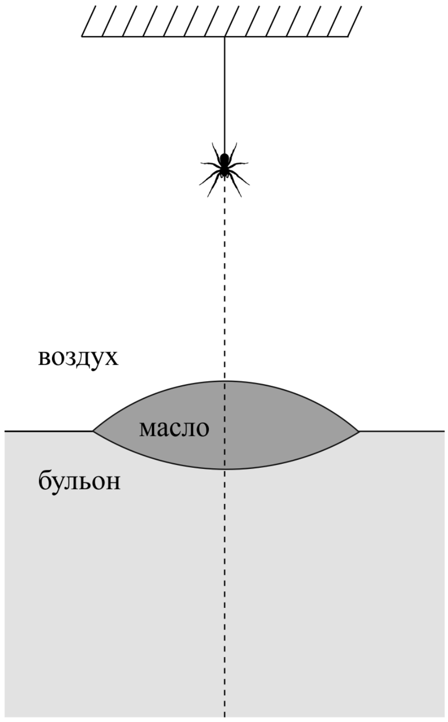
1. Правильно найдены заряды/напряжения на конденсаторах в первом положении ключа (+2 балла).

2. Правильно записан закон сохранения энергии в первом положении ключа (+1 балл).

3. Получено значение Q_1 (+1 балл).
4. Правильно найдены заряды/напряжения на конденсаторах во втором положении ключа (+2 балла).
5. Правильно записан закон сохранения энергии во втором положении ключа (+2 балла).
6. Получено значение Q_2 (+1 балл).
7. Найден заряд Δq (+1 балл).

Задача 6.

На ровном горизонтальном столе находится тарелка с бульоном, на поверхности которого плавают масляные капли. Над тарелкой находится паучок Аркаша, который спускается по паутине с постоянной скоростью v. В некоторый момент времени, оказавшись на высоте h над одной из капель, с радиусами кривизны R_1 (поверхность воздух-масло) и R_2 (поверхность бульон-масло),



Аркаша увидел свое изображение на дне тарелки. Определите фокусные расстояния линзы, образуемой масляной каплей на поверхности бульона (см. рисунок) и скорость изображения Аркаши в системе отсчёта паучка в этот момент. Показатели преломления масла, бульона и воздуха известны и находятся в соотношении $n_{масла} > n_{бульона} > n_{воздуха} \simeq 1$.

1) Аркаша видит свое действительное изображение на дне тарелки (изображение, которое видит паучок формируется отраженными лучами от дна тарелки), значит h больше, чем фокусное расстояние линзы со стороны воздуха,
2) Для расчета расстояния до верхней и нижней фокальной плоскости линзы, лежащей на бульоне, найдем оптическую силу линзы, опущенной в воду. Сначала разделим ее на 2 части, одну лежащую в воздухе, а другую в воде, а затем просуммируем оптические силы этих частей.

$$\Phi_1 = \frac{n_{масла}-1}{R_1}, \quad \Phi_2 = \frac{n_{масла}-n_{бульона}}{R_2}$$

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{n_{ст.л.}-1}{R_1} + \frac{n_{ст.л.}-n_{бульона}}{R_2}$$

кроме того, вспомним, что оптическая силы линзы будет равна $D = \frac{n_{возд}}{f_1} = \frac{n_{бульона}}{f_2}$
Отсюда можно выразить расстояния до верхней и нижней фокальной плоскости (f_1 и f_2 соответственно).

$$f_1 = \frac{R_1 R_2}{(n_{масла.}-1)R_2 + (n_{масла.}-n_{бульона})R_1}$$

$$f_2 = \frac{R_1 R_2 \cdot n_{бульона}}{(n_{масла}-1)R_2 + (n_{масла}-n_{бульона})R_1}$$

3) Теперь найдем то, с какой скоростью движется наше изображение. Оно будет действительным. С поправками на показатели преломления сред слева и справа линзы мы можем записать формулу тонкой линзы, используя расстояния от объекта до линзы и от линзы до изображения. Запишем ее для определенного момента времени *t*

$$\frac{n_{бульона}}{f_1} = \frac{n_{возд}}{a} + \frac{n_{бульона}}{b}$$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{a} + \frac{n_{\text{бульона}}}{b}$$

Теперь запишем эту формулу для момента времени *t*+*dt*

$$\frac{1}{f_1} = \frac{1}{a - da} + \frac{n_{\text{бульона}}}{b + db}$$

Вычтем друг из друга две предыдущие скорости

$$0 = \frac{da}{a(a - da)} + \frac{db \cdot n_{\text{бульона}}}{b(b + db)}$$

Теперь, поделив все на *dt* мы получим зависимость скоростей от отношения $(b/a)^2$, то есть от линейного увеличения в квадрате и от показателя преломления воды. Но т.к. нам нужно найти скорость в системе отсчета паука, то еще прибавим v.

$$v_1 = \frac{v \cdot \Gamma^2}{n_{\text{бульона}}} + v$$

Так же можно посчитать скорость движения изображение, из знания коэффициента продольного увеличения тонкой линзы.

Критерии

1. Правильно определены оптические силы (+2 балла). Если указана только одна оптическая сила (+ 1 балл).
2. Правильно найдены фокусные расстояния (+4 балла). Если найдено только одно фокусное расстояние (+2 балла).
3. Найдена искомая скорость (+4 балла).
   При нахождении скорости через увеличения линзы применимы следующие критерии
   a. Найдено поперечное увеличение (+1 балл).
   b. Найдено продольное увеличение (+1 балл).
   c. Показано, что скорости связаны через продольное увеличение (+1 балл).
   d. Получен ответ для скорости изображения в системе паучка (+1 балл).