Олимпиада «Курчатов»

2015–16 учебный год

Заключительный этап

7 класс

Задача 7.1

Условие

Из-за долгого использования школьный динамометр стал давать неправильные показания, хотя для его пружины всё ещё оставался справедливым закон Гука. Когда к динамометру подвесили груз массой 200 г, динамометр показал 3,0 Н, а когда подвесили груз массой 350 г, динамометр показал 4,8 Н. Найдите показания этого динамометра, если к нему подвесить груз массой 300 г.

Возможное решение

По условию для пружины динамометра справедлив закон Гука, значит, её удлинение прямо пропорционально приложенной к динамометру силе, а сила, действующая на динамометр, прямо пропорциональна массе подвешенного груза. Следовательно, удлинение пружины также прямо пропорционально массе подвешенного груза m. Как видно из условия, показания динамометра не прямо пропорциональны массе подвешенного груза, значит, у динамометра сбит ноль. Получаем, что зависимость показаний динамометра F от массы подвешенного груза линейна:

$$F = A + Bm.$$

Найдём коэффициенты этой зависимости:

$$B = \frac{4{,}8\ \text{Н} - 3{,}0\ \text{Н}}{350\ \text{г} - 200\ \text{г}} = 12\ \frac{\text{Н}}{\text{кг}},$$

$$A = 3{,}0\ \text{Н} - 12\ \frac{\text{Н}}{\text{кг}} \cdot 200\ \text{г} = 0{,}6\ \ \text{Н}.$$

Найдём показания динамометра, когда к нему подвесят груз массой 300 г

$$A + B \cdot 300\ \text{г} = 4{,}2\ \text{Н}.$$

Критерии оценивания

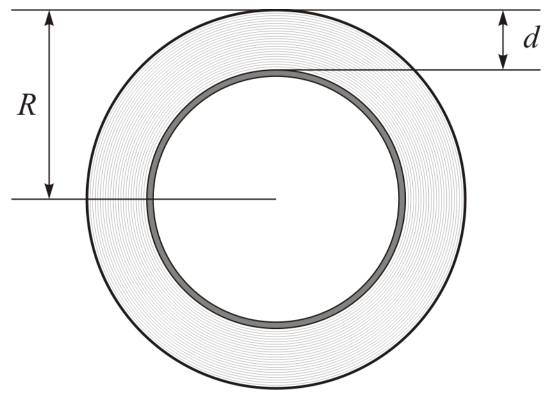
Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что растяжение пружины динамометра прямо пропорционально приложенной к ней силе ....1 балл
Указано, что показания динамометра линейно зависят от массы подвешенного груза...2 балла
Получен правильный ответ ....2 балла
Если получен неправильный ответ из-за вычислительной ошибки (ход решения правильный), решение оценивается в 4 балла.

Задача 7.2

Условие

Внешний радиус рулона клейкой ленты (скотча) равен $R = 60$ мм, а толщина рулона $d = 19$ мм (см. рис.). Длина ленты в рулоне $L = 150$ м. Пользуясь этими данными, как можно точнее определите:



1. количество слоёв в рулоне,
2. толщину одного слоя.

Примечание: длина l окружности находится по формуле $l = 2\pi r$, где r — радиус окружности, $\pi \approx$ $\approx 3{,}141593$.

Возможное решение

<u>Способ 1.</u> Введем величину, которая впоследствии «сократится» – ширину ленты h. Пусть толщина ленты равна x. Объём пространства, занятый клейкой лентой, равен: $hxL = h\pi[R^2 - (R-d)^2]$. Из этой формулы следует: $x = \pi(2Rd - d^2)/L \approx 40$ мкм. Количество слоёв равно

$$N = \frac{d}{x} \approx 475.$$

<u>Способ 2.</u> Длину ленты в одном слое можно найти по формуле $l = 2\pi r$. Но у разных слоёв разные радиусы (наибольший радиус, равный R, у внешнего слоя, а наименьший, равный $R - d$, у внутреннего). Поэтому будем использовать среднее значение радиуса слоя, равное $r_{\text{ср}} = R - \frac{d}{2} = 50{,}5$ мм. Тогда число слоёв равно

$$N = \frac{L}{2\pi r_{\text{ср}}} \approx 473.$$

Толщину одного слоя найдём, разделив общую толщину рулона на количество слоёв:

$$d_0 = \frac{d}{N} \approx 40 \text{ мкм}.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что число слоёв равно длине ленты, делённой на длину одного слоя ....1 балл
Найдено число слоёв ....1 балл
Указано, что толщина одного слоя равна общей толщине, делённой на число слоёв ....1 балл
Найдена толщина одного слоя ....1 балл
Для расчётов использовалось среднее значение радиуса ....1 балл
(если для расчётов использовалось не среднее, а какое-либо другое значение радиуса, но всё остальное сделано правильно, решение оценивается в 4 балла)

Задача 7.3

Условие

Спортсмен начал забег по прямой и первые 10 м бежал со скоростью 10 м/с, следующие 10 м – со скоростью 9 м/с, следующие 10 м – со скоростью 8 м/с, и так далее… Какое расстояние S он пробежал к тому моменту, когда остановился? Сколько времени длился забег до остановки? С какой средней скоростью он пробежал первую половину дистанции $S/2$? Какое расстояние он пробежал за первую половину времени забега?

Возможное решение

Поскольку скорость спортсмена на каждом следующем участке на 1 м/с меньше, чем на предыдущем, а скорость на первом участке равна 10 м/с, всего спортсмен пробежит 10 участков, то есть $S = 10 \cdot 10 \text{ м} = 100 \text{ м}$. Время забега t найдём непосредственным расчётом:

$$t = \frac{10 \text{ м}}{10 \text{ м/с}} + \frac{10 \text{ м}}{9 \text{ м/с}} + \cdots + \frac{10 \text{ м}}{2 \frac{\text{м}}{\text{с}}} + \frac{10 \text{ м}}{1 \frac{\text{м}}{\text{с}}} \approx 29{,}3 \text{ с.}$$

Рассчитаем время t_1, за которое спортсмен пробежал первую половину дистанции:

$$t_1 = \frac{10 \text{ м}}{10 \text{ м/с}} + \frac{10 \text{ м}}{9 \text{ м/с}} + \cdots + \frac{10 \text{ м}}{7 \frac{\text{м}}{\text{с}}} + \frac{10 \text{ м}}{6 \frac{\text{м}}{\text{с}}} \approx 6{,}45 \text{ с.}$$

Средняя скорость на первой половине пути равна

$$v_1 = \frac{\frac{S}{2}}{t_1} \approx 7{,}74 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Когда прошла ровно половина времени забега, спортсмен бежал со скоростью 2 м/с. Он начал бежать с такой скоростью через 14,29 с после старта. Значит, за половину времени он пробежал расстояние, равное

$$s_2 = 80 \text{ м} + 2 \ \frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \left(\frac{t}{2} - 14{,}29 \text{ с}\right) = 80{,}7 \text{ м.}$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Найдено пройденное расстояние ....1 балл
Найдено время забега..1 балл
Найдена средняя скорость на первой половине дистанции .... 1 балл
Найдено расстояние, пройденное за первую половину времени......................................2 балла

Задача 7.4

Условие

Полая тонкостенная металлическая капсула в форме шара лежит на дне цилиндрического сосуда с площадью дна $S = 5$ м^2. Капсула наполовину заполнена водой, а наполовину – воздухом. Масса оболочки капсулы равна $M = 2$ т, а масса воды в ней – $m = 1{,}5$ т. С помощью легкого насоса, встроенного в корпус капсулы, вода переливается из неё в сосуд, и капсула всплывает. На сколько изменится (поднимется или опустится) уровень воды в сосуде в этом процессе (считая от момента, когда вся вода еще находится в капсуле, и до момента, когда капсула плавает опустошённая)? Плотность воды $\rho = 1000$ кг/м^3.

Возможное решение

Масса воды, наполовину заполняющей капсулу, равна m, значит, объём капсулы равен

$$V = \frac{2m}{\rho} = 3 \text{ м}^3.$$

Вначале капсула вытесняет объём воды, равный объёму капсулы. В конце, согласно закону Архимеда, капсула вытесняет воду весом, равным весу капсулы. Дополнительно вода из капсулы была перелита в сосуд, поэтому изменение уровня воды в сосуде равно

$$\Delta h = \frac{M + m - 2m}{\rho S} = 10 \text{ см}.$$

Критерии оценивания

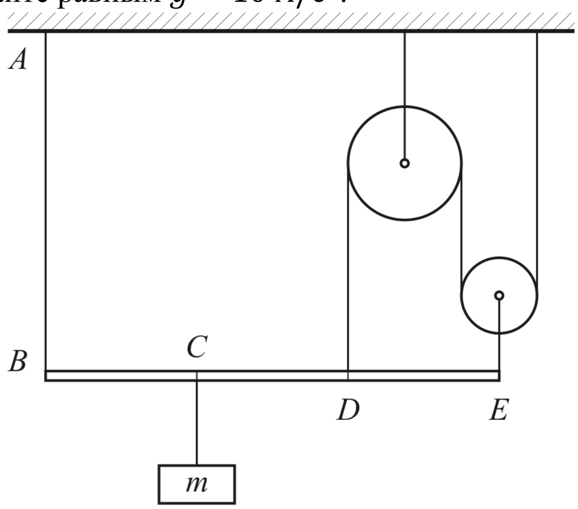
Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Найден объём воды, вытесняемой капсулой в начале .... 1 балл
Найден объём воды, вытесняемой капсулой в конце .... 1 балл
Учтено, что вода из капсулы была перелита в сосуд .... 1 балл
Получен ответ .... 2 балла

Задача 7.5

Условие

К лёгкому стержню BE подвешен груз массой $m = 6$ кг (см. рис.). Стержень удерживается системой идеальных блоков и нитей. Вся система находится в равновесии. Найдите силу натяжения нити AB. Точки C и D делят стержень на три равные части. Модуль ускорения свободного падения считайте равным $g = 10\ \text{м/с}^2$.



Возможное решение

Пусть искомая сила натяжения равна T_1, а сила натяжения нити, прикреплённой к стержню в точке D, равна T_2. Поскольку подвижный блок даёт выигрыш в силе в 2 раза, то сила натяжения нити, прикреплённой к стержню в точке E будет равна $2T_2$. Из условия равновесия груза следует, что сила натяжения нити, которой груз прикреплён к стержню, равна mg. Запишем условие равновесия стержня:

$$T_1 + 3T_2 = mg. \qquad (1)$$

Запишем правило моментов для стержня относительно точки C:

$$T_1 \frac{l}{3} = T_2 \frac{l}{3} + 2T_2 \frac{2l}{3} \Longrightarrow T_2 = \frac{T_1}{5},$$

где l — длина стержня. Подставив полученное выражение для T_2 в (1), получим

$$T_1 = \frac{5}{8} mg = 37{,}5\ \text{Н}.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что сила натяжения нити, прикреплённой к точке E в 2 раза больше силы натяжения нити, прикреплённой в точке D .... 1 балл

Записано условие равновесия стержня (1) .... 1 балл

Записано правило моментов для стержня .... 1 балл

Получен ответ .... 2 балла

8 класс

Задача 8.1

Условие

На крючке ручных пружинных весов висит ведро с водой. Весы показывают 9,5 кг. В воду полностью погрузили кирпич массой 2,5 кг с размерами $5\ \text{см} \times 10\ \text{см} \times 20\ \text{см}$, удерживая его на тонкой веревочке. Кирпич стенок и дна ведра не касается. Теперь весы показывают 10 кг. Найдите массу воды, вылившейся из ведра. Плотность воды $1000\ \text{кг}/\text{м}^3$.

Возможное решение

При опускании кирпича в воду, вес ведра увеличится на величину силы Архимеда, действующей на кирпич, и уменьшится на величину веса вылившейся воды. Масса вытесненной кирпичом воды равна

$$5\ \text{см} \cdot 10\ \text{см} \cdot 20\ \text{см} \cdot 1000\ \frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 1\ \text{кг}.$$

Значит, масса вылившейся воды равна

$$9{,}5\ \text{кг} + 1\ \text{кг} - 10\ \text{кг} = 0{,}5\ \text{кг}.$$

Критерии оценивания

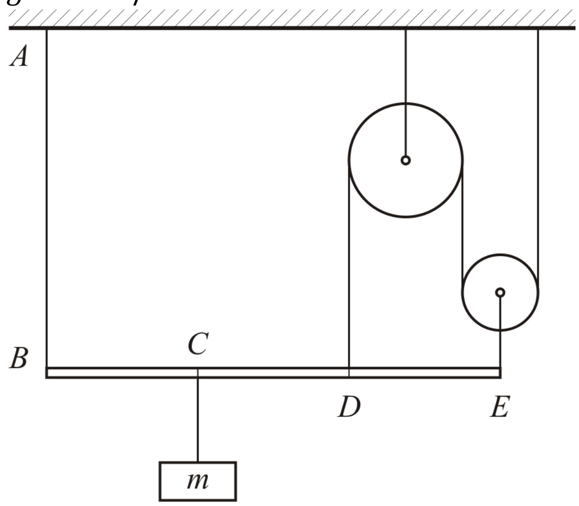
Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Найдена масса вытесненной кирпичом воды ....2 балла
Указано, что изменения показания весов есть масса вытесненной кирпичом воды минус масса вылившейся из ведра воды..1 балл
Получен ответ ....2 балла

Задача 8.2

Условие

К лёгкому стержню BE подвешен груз массой $m = 6$ кг. Стержень удерживается системой идеальных блоков и нитей. Вся система находится в равновесии. Найдите силу натяжения нити AB. Точки C и D делят стержень на три равные части. Модуль ускорения свободного падения считайте равным $g = 10\ \text{м/с}^2$.



Возможное решение

Пусть искомая сила натяжения равна T_1, а сила натяжения нити, прикреплённой к стержню в точке D, равна T_2. Поскольку подвижный блок даёт выигрыш в силе в 2 раза, то сила натяжения нити, прикреплённой к стержню в точке E будет равна $2T_2$. Из условия равновесия груза следует, что сила натяжения нити, которой груз прикреплён к стержню, равна mg. Запишем условие равновесия стержня:

$$T_1 + 3T_2 = mg. \tag{1}$$

Запишем правило моментов для стержня относительно точки C:

$$T_1\frac{l}{3} = T_2\frac{l}{3} + 2T_2\frac{2l}{3} \Longrightarrow T_2 = \frac{T_1}{5},$$

где l — длина стержня. Подставив полученное выражение для T_2 в (1), получим

$$T_1 = \frac{5}{8}mg = 37{,}5\ \text{Н}.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что сила натяжения нити, прикреплённой к точке E в 2 раза больше силы натяжения нити, прикреплённой в точке D ....1 балл
Записано условие равновесия стержня (1) ....1 балл
Записано правило моментов для стержня ....1 балл
Получен ответ ....2 балла

Задача 8.3

Условие

Поезд прошёл прямой участок железной дороги от полустанка «582 км» до полустанка «603 км» с постоянной скоростью, без остановок. Пассажир, находящийся на полустанке «582 км», отметил, что поезд прошёл его полустанок в 15:32, а пассажир, находящийся на полустанке «603 км», отметил, что его полустанок поезд прошёл в 15:48. С какой скоростью мог двигаться поезд, если известно, что часы пассажиров установлены неточно, но погрешность каждого из приборов не превышает 1 минуты?

Возможное решение

Расстояние между станциями, как следует из их названий, равно $s = 603\text{ км} - 582\text{ км} = 21\text{ км}$. Наименьшее значение скорости поезда получится, если часы первого наблюдателя спешат, а часы второго опаздывают на 1 минуту. Тогда время движения поезда от первой до второй станции равно $t_1 = (15\text{ ч }49\text{ мин}) - (15\text{ ч }31\text{ мин}) = 18\text{ мин}$. Минимальное возможное значение скорости

$$v_1 = \frac{s}{t_1} = 70\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Наибольшее значение скорости поезда получится, если часы первого наблюдателя опаздывают, а часы второго спешат на 1 минуту. Тогда время движения поезда от первой до второй станции равно $t_2 = (15\text{ ч }47\text{ мин}) - (15\text{ ч }33\text{ мин}) = 14\text{ мин}$. Максимальное возможное значение скорости

$$v_2 = \frac{s}{t_2} = 90\ \frac{\text{км}}{\text{ч}}.$$

Ответ: от 70 км/ч до 90 км/ч.

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Найдено расстояние между станциями ....1 балл
Найдено набольшее время движения поезда ....1 балл
Найдена минимальная скорость ....1 балл
Найдено наименьшее время движения поезда ....1 балл
Найдена максимальная скорость..1 балл

Задача 8.4

Условие

В лаборатории есть два куска медной проволоки одинакового поперечного сечения. Сопротивление этих кусков, соединённых последовательно, в 6,25 раза больше сопротивления этих же кусков, соединённых параллельно. Найдите отношение длин этих кусков проволоки.

Возможное решение

Пусть сопротивление первого куска равно R, а второго — xR. Сопротивление последовательно соединённых кусков равно

$$R + xR = (1 + x)R,$$

а сопротивление при параллельном соединении равно

$$\frac{R \cdot xR}{R + xR} = \frac{x}{1 + x}R.$$

По условию

$$(1 + x)R = 6{,}25\frac{x}{1 + x}R \Longrightarrow x^2 - 4{,}25x + 1 = 0.$$

Решая получившееся квадратное уравнение, находим $x_1 = 4$, $x_2 = \frac{1}{4}$. То есть сопротивление одного куска в 4 раза больше сопротивления второго. У кусков проволоки из одного и того же материала одинакового сечения отношение сопротивлений равно отношению длин, поэтому длина одного куска в 4 раза больше длины другого.

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Правильно использованы формулы для последовательного и параллельного соединения проводников .... 1 балл
Найдено отношение сопротивлений .... 2 балла
Указано, что отношение сопротивлений равно отношению длин .... 1 балл
Получен ответ .... 1 балл

Задача 8.5

Условие

Температура окружающей подводную лодку воды равна +4 С°. Ядерный реактор лодки непрерывно выделяет тепловую мощность 0,4 ГВт. Максимальный КПД теплового двигателя подлодки равен 0,4. Оцените величину минимального расхода охлаждающей двигатель забортной воды. На выходе из системы охлаждения вода не должна иметь температуру выше +40 С.

Удельная теплоёмкость воды равна $4{,}2\ \text{кДж}/(\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C})$. Расходом называется масса воды, проходящей за единицу времени через систему охлаждения; расход измеряется в кг/с.

Возможное решение

Система охлаждения за 1 с должна отводить количество теплоты, равное

$$(1-0{,}4)\cdot 0{,}4\ \text{ГВт}\cdot 1\ \text{с} = 240\ \text{МДж},$$

для этого потребуется вода массой

$$\frac{240\ \text{МДж}}{4{,}2\ \frac{\text{кДж}}{\text{кг}\cdot{}^\circ\text{C}}\cdot(40\ {}^\circ\text{C} - 4\ {}^\circ\text{C})} = 1{,}6\cdot 10^3\ \text{кг},$$

значит, минимальный расход воды $1{,}6\cdot 10^3\ \text{кг}/\text{с}$.

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

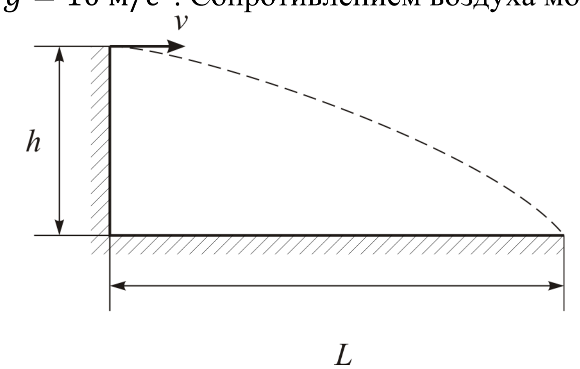
Найдена тепловая мощность, которую необходимо отводить..2 балла
Записано уравнение теплового баланса ....1 балл
Получен ответ ....1 балл

9 класс

Задача 9.1

Условие

Дальность полёта L тела, брошенного горизонтально со скоростью $v = 3$ м/с, в 3 раза больше высоты h, с которой бросили тело. Найдите время полёта тела и модуль скорости тела непосредственно перед падением на горизонтальную поверхность. Модуль ускорения свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2. Сопротивлением воздуха можно пренебречь.



Возможное решение

Пусть время полёта равно t. Тогда $L = vt$, а $h = \frac{gt^2}{2}$, значит,

$$vt = \frac{3gt^2}{2} \Longrightarrow t = \frac{2v}{3g} = 0{,}2 \text{ с.}$$

Значит, высота $h = \frac{gt^2}{2} = 0{,}2$ м. Конечную скорость v_1 найдём из закона сохранения энергии (массу тела примем равной 1):

$$\frac{v^2}{2} + gh = \frac{v_1^2}{2} \Longrightarrow v_1 = \sqrt{v^2 + 2gh} \approx 3{,}6 \ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Записано связь между дальностью и временем полёта ....1 балл
Записано связь между высотой и временем полёта ....1 балл
Найдено время полёта ....1 балл
Найдена конечная скорость ....2 балла

Задача 9.2

Условие

Пружина расположена вдоль оси X. Один из концов пружины закреплен. Для перемещения второго конца пружины из положения с координатой «a» в положение с координатой «b» потребовалось совершить работу A. Для перемещения этого же конца пружины из положения с координатой «$2a$» в положение с координатой «$2b$» потребовалось совершить работу $1{,}5A$. Какая работа потребуется для перемещения этого же конца пружины из положения «$3a$» в положение «$3b$»?

Возможное решение

Поскольку неизвестно, была ли пружина деформирована в начальный момент, обозначим её начальную деформацию символом x. Будем считать жесткость пружины равной единице. Тогда выполняются следующие соотношения:

$A = (b - x)^2/2 - (a - x)^2/2;$

$3A/2 = (2b - x)^2/2 - (2a - x)^2/2.$

Нужно найти величину:

$Y = (3b - x)^2/2 - (3a - x)^2/2.$

Перепишем два соотношения и уравнение для Y в виде:

$(b^2 - a^2)/2 = A + (b - a)x;$ (1)

$2(b^2 - a^2) = 3A/2 + 2(b - a)x;$ (2)

$Y = 9(b^2 - a^2)/2 - 3(b - a)x.$

Обозначим $(b^2 - a^2)/2 \equiv m$, и $(b - a)x \equiv k$.

Решая систему из уравнений (1) и (2), находим: $m = -A/4$; $k = -5A/4$.

Отсюда получается: $Y = -9A/4 + 15A/4 = 1{,}5A$.

Критерии оценивания

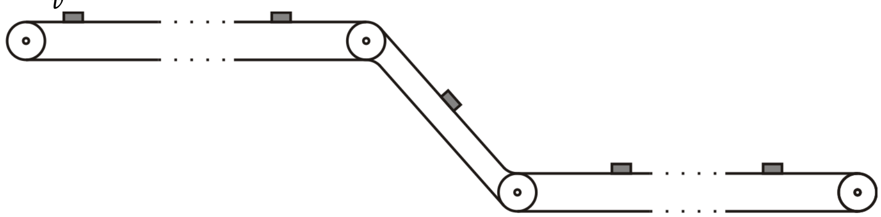
Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что работа равна изменению потенциальной энергии пружины ....1 балл
Записано выражение для потенциальной энергии пружины (с учётом неизвестного x) ...1 балл
Решена система уравнений (1) и (2) или аналогичная ей ....1 балл
Получен ответ ....2 бала

Задача 9.3

Условие

На ленте длинного транспортёра, имеющего два горизонтальных участка и один наклонный, движутся с постоянной скоростью одинаковые грузы массой M. Грузы расположены вдоль ленты на одинаковых расстояниях друг от друга и не скользят по ней. Лента приводится в движение мотором постоянной мощности. С нижнего горизонтального участка транспортера на верхний поднимается N грузов в минуту. После того, как к каждому грузу привязали воздушный шар массой m и объёмом v, транспортёр стал поднимать n грузов в минуту. Найдите величину n. Мощность мотора после привязывания шаров осталась прежней, плотность воздуха ρ, $\frac{M}{v} > \rho > \frac{m}{v}$. Потерями механической энергии в системе можно пренебречь.



Возможное решение

Пусть h — это разность высот между верхним и нижним горизонтальными участками транспортёра. За минуту N мешков поднимаются на высоту h, и изменение их потенциальной энергии равно мощности мотора

$$P = MghN.$$

После того, как к грузам привязали легкие шары, при поднятии одного груза потенциальная энергия груза с шаром увеличивается на $(M + m)gh$, но потенциальная энергия воздуха, вытесняемого шаром, уменьшается на ρvgh. Поэтому мощность мотора равна

$$P = (M + m - \rho v)ghn.$$

Поскольку мощность мотора не меняется, то

$$n = \frac{M}{M + m - \rho v} N.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Записано выражение для мощности в первом случае..1 балл
Записано выражение для мощности во втором случае..2 балла
Получен ответ ....2 балла

Задача 9.4

Условие

В лаборатории есть два куска медной проволоки одинакового поперечного сечения. Если два этих куска соединить параллельно и подключить к идеальному источнику постоянного напряжения, то выделяющаяся в цепи мощность будет в 4,9 раза больше, чем если те же куски проволоки соединить последовательно и подсоединить к тому же источнику. Найдите отношение длин этих кусков проволоки.

Возможное решение

Пусть сопротивление первого куска равно R, а второго — xR. Сопротивление последовательно соединённых кусков равно

$$R + xR = (1 + x)R,$$

а сопротивление при параллельном соединении равно

$$\frac{R \cdot xR}{R + xR} = \frac{x}{1 + x} R.$$

При постоянном напряжении источника, выделяющаяся мощность обратно пропорциональна сопротивлению нагрузки:

$$(1 + x)R = 4{,}9 \frac{x}{1 + x} R \Longrightarrow x^2 - 2{,}9x + 1 = 0.$$

Решая получившееся квадратное уравнение, находим $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = \frac{2}{5}$. То есть сопротивление одного куска в 2,5 раза больше сопротивления второго. У кусков проволоки из одного и того же материала одинакового сечения отношение сопротивлений равно отношению длин, поэтому длина одного куска в 2,5 раза больше длины другого.

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Правильно использованы формулы для последовательного и параллельного соединения проводников .... 1 балл
Найдено отношение сопротивлений .... 2 балла
Указано, что отношение сопротивлений равно отношению длин .... 1 балл
Получен ответ .... 1 балл

Задача 9.5

Условие

У школьника Васи есть много одинаковых медных монет с температурой t_0 и теплоизолированный цилиндрический сосуд с водой, начальная температура которой тоже равна t_0. Вася по одной опускает монеты в воду, отпуская их без начальной скорости с высоты текущего уровня воды. Площадь дна сосуда S, начальный уровень воды H, масса одной монеты m, удельная теплоёмкость меди c, плотность меди равна ρ. Плотность и удельная теплоёмкость воды равны ρ_0 и c_0. До какой максимальной температуры можно нагреть воду таким способом? Сколько нужно бросить в воду монет, чтобы изменение её температуры было вдвое меньше максимально возможного? При решении задачи cчитайте, что монеты занимают весь объём ниже определенного уровня, то есть образуют на дне сплошной медный цилиндр (промежутки между монетами можно не учитывать). Теплоемкостью сосуда можно пренебречь.

Возможное решение

Поскольку промежутки между монетами можно не учитывать, то расстояния от верхнего края воды до верхнего края объёма, занимаемого монетами, всегда будет равно H. Нагревание жидкости будет происходить за счёт потенциальной энергии монет. При падении одной монеты, она опускается на глубину H, но такой же объём воды поднимается на высоту H, как бы занимая место монеты. То есть тепло, выделяемое при падении одной монеты, равно

$$Q = mgH - \frac{\rho_0}{\rho} mgH = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) mgH.$$

Это тепло идёт на нагрев всего содержимого сосуда, в том числе и последней монетки. Максимальную конечную температуру t в сосуде можно найти, если предположить, что вся выделяющаяся теплота идёт на нагрев одной последней монетки. Действительно, при падении очередной монеты вода и все ранее утонувшие монеты немного нагреваются. Поэтому каждый раз температура содержимого сосуда немного повышается. Пусть содержимое сосуда нагрелось до максимально возможной температуры. Это означает, что при бросании очередной монеты вся выделившаяся при ее падении теплота пойдет на нагревание как раз этой монеты до максимальной установившейся температуры содержимого сосуда (т.к. иначе получилось бы, что максимальная температура содержимого еще не достигнута). Значит

$$\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) mgH = cm(t - t_0) \Rightarrow t = t_0 + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) \frac{gH}{c}.$$

Количество монет N, которое необходимо бросить, чтобы нагреть воду до температуры $t_1 = \frac{t+t_0}{2}$, найдём из уравнения теплового баланса

$$NQ = (Ncm + c_0\rho_0 SH)(t_1 - t_0) \Rightarrow N = \frac{c_0\rho_0 SH}{cm}.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

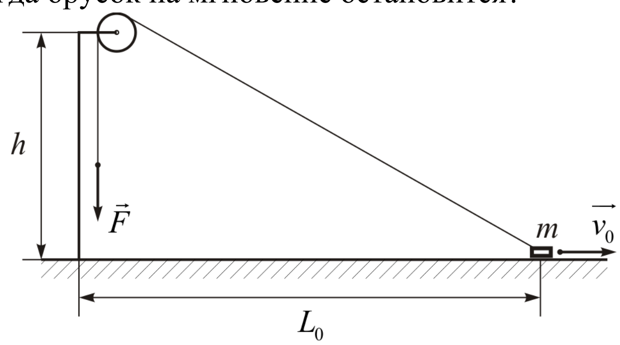
Получено выражение для тепла Q, выделяемого при падении одной монеты ....1 балл
Найдена максимальная конечная температура t ....2 балла
Записано уравнение теплового баланса (для нахождения N) ....1 балл
Найдено количество монет N ....1 балл

10 класс

Задача 10.1

Условие

Маленький брусок массой m находится на гладкой горизонтальной поверхности на расстоянии L_0 от вертикального столба, на котором на высоте h на коротком держателе закреплён маленький невесомый блок с неподвижной горизонтальной осью. Невесомая нерастяжимая длинная нить одним концом прикреплена к бруску, перекинута через блок и натянута с постоянной силой F. Трения в оси блока нет. В начальный момент брусок скользит по поверхности и имеет скорость v_0, направленную от столба. Каким будет расстояние L_1 от столба до бруска в тот момент, когда брусок на мгновение остановится?



Возможное решение

Кинетическая энергия бруска изменяется, так как сила F совершает работу. Поскольку сила, действующая на брусок всегда направлена вдоль нити к блоку, то работа силы равна произведению модуля силы на изменение длины участка нити между бруском и блоком, взятому со знаком минус. Когда брусок остановится, его кинетическая энергия будет равна нулю, поэтому

$$\frac{mv_0^2}{2} = F\left(\sqrt{L_1^2 + h^2} - \sqrt{L_0^2 + h^2}\right) \Rightarrow L_1 = \sqrt{\left(\frac{mv_0^2}{2F} + \sqrt{L_0^2 + h^2}\right)^2 - h^2}$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что работа силы F равна произведению величины силы на изменение длины участка нити между бруском и блоком, взятому со знаком минус ....2 балла
Записан закон изменения механической энергии ....1 балл
Получен ответ ....2 балла

Задача 10.2

Условие

Астроном-любитель Вася следит за движением двух искусственных спутников Земли, летающих на одной и той же высоте $h = 300$ км над экватором по круговым орбитам. Спутники пролетают точно над наблюдателем. Вася измеряет периоды движения этих спутников (промежутки времени между последовательными «пролётами» над ним). Оказалось, что эти периоды заметно отличаются. Какова разница этих периодов?

Модуль ускорения свободного падения у поверхности Земли $g = 9{,}8\,\frac{\text{м}}{\text{с}^2}$, радиус Земли $R_0 = 6{,}4 \cdot 10^6$ м.

Возможное решение

Высота спутников постоянна, значит, их орбиты круговые. Радиусы орбит одинаковы, значит, времена оборотов спутников вокруг Земли также одинаковы. Разница наблюдаемых Васей периодов возникает из-за суточного вращения Земли (спутники летят в разные стороны).

Пусть ω — угловая скорость вращения спутников, ω_0 — угловая скорость вращения Земли.

За сутки Земля делает один оборот, поэтому

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{24\text{ ч}} = 7{,}3 \cdot 10^{-5}\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Спутники движутся по орбитам с постоянным по модулю ускорением которое можно найти из закона всемирного тяготения. Это же ускорение является для них центростремительным

$$\omega^2(R_0 + h) = g\frac{R_0^2}{(R_0 + h)^2} \Longrightarrow \omega = \sqrt{g\frac{R_0^2}{(R_0 + h)^3}} = 1{,}16 \cdot 10^{-3}\ \frac{\text{рад}}{\text{с}}.$$

Относительно Васи один спутник вращается с угловой скоростью $\omega - \omega_0$, а другой с угловой скоростью $\omega + \omega_0$. Разность наблюдаемых периодов равна

$$\frac{2\pi}{\omega - \omega_0} - \frac{2\pi}{\omega + \omega_0} = \frac{4\pi\omega_0}{\omega^2 - \omega_0^2} \approx 12\text{ мин.}$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Исходя из известной высоты орбиты, найдена угловая скорость спутника, либо линейная скорость спутника, либо период обращения спутника .... 2 балла

Получено выражение для разности периодов (не обязательно через угловые скорости, можно, например, выразить её через периоды обращения спутников и Земли) .... 2 балла

Получен правильный численный ответ .... 1 балл

Задача 10.3

Условие

У школьника Васи есть много одинаковых медных монет с температурой t_0 и теплоизолированный цилиндрический сосуд с водой, начальная температура которой тоже равна t_0. Вася по одной опускает монеты в воду, отпуская их без начальной скорости с высоты текущего уровня воды. Площадь дна сосуда S, начальный уровень воды H, масса одной монеты m, удельная теплоёмкость меди c, плотность меди равна ρ. Плотность и удельная теплоёмкость воды равны ρ_0 и c_0. До какой максимальной температуры можно нагреть воду таким способом? Сколько нужно бросить в воду монет, чтобы изменение её температуры было вдвое меньше максимально возможного? При решении задачи считайте, что монеты занимают весь объём ниже определенного уровня, то есть образуют на дне сплошной медный цилиндр (промежутки между монетами можно не учитывать). Теплоемкостью сосуда можно пренебречь.

Возможное решение

Поскольку промежутки между монетами можно не учитывать, то расстояния от верхнего края воды до верхнего края объёма, занимаемого монетами, всегда будет равно H. Нагревание жидкости будет происходить за счёт потенциальной энергии монет. При падении одной монеты, она опускается на глубину H, но такой же объём воды поднимается на высоту H, как бы занимая место монеты. То есть тепло, выделяемое при падении одной монеты, равно

$$Q = mgH - \frac{\rho_0}{\rho} mgH = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) mgH.$$

Это тепло идёт на нагрев всего содержимого сосуда, в том числе и последней монетки. Максимальную конечную температуру t в сосуде можно найти, если предположить, что вся выделяющаяся теплота идёт на нагрев одной последней монетки. Действительно, при падении очередной монеты вода и все ранее утонувшие монеты немного нагреваются. Поэтому каждый раз температура содержимого сосуда немного повышается. Пусть содержимое сосуда нагрелось до максимально возможной температуры. Это означает, что при бросании очередной монеты вся выделившаяся при ее падении теплота пойдет на нагревание как раз этой монеты до максимальной установившейся температуры содержимого сосуда (т.к. иначе получилось бы, что максимальная температура содержимого еще не достигнута). Значит

$$\left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right) mgH = cm(t - t_0) \Rightarrow t = t_0 + \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)\frac{gH}{c}.$$

Количество монет N, которое необходимо бросить, чтобы нагреть воду до температуры $t_1 = \frac{t+t_0}{2}$, найдём из уравнения теплового баланса

$$NQ = (Ncm + c_0\rho_0 SH)(t_1 - t_0) \Rightarrow N = \frac{c_0\rho_0 SH}{cm}.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Получено выражение для тепла Q, выделяемого при падении одной монеты ....1 балл
Найдена максимальная конечная температура t ....2 балла
Записано уравнение теплового баланса (для нахождения N) ....1 балл
Найдено количество монет N ....1 балл

Задача 10.4

Условие

Точечный заряд $q = 10$ нКл помещён на расстоянии $L = 1$ м от центра проводящего заземлённого шара радиусом $R = 20$ см. Найдите заряд шара Q.

Возможное решение

Поскольку шар заземлён, потенциал любой его точки равен нулю. В том числе, и потенциал в центре шара

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{L} + \frac{Q}{R}\right) = 0.$$

Здесь используется формула для потенциала точечного заряда. В проводниках заряд может находиться только на их поверхности, а расстояние от любой точки поверхности шара до его центра одинаково. Окончательно

$$Q = -\frac{R}{L}q = -2\text{ нКл}.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что потенциал шара равен нулю .... 1 балл
Указано, что в шаре заряд находится только на поверхности .... 1 балл
Записано выражение для потенциала в центре шара, создаваемого зарядом q .... 1 балл
Записано выражение для потенциала в центре шара, создаваемого зарядами шара .... 1 балл
Получен ответ .... 1 балл

Задача 10.5

Условие

Полностью заполненная водой ванна с вертикальными боковыми стенками освобождается от воды через открытое сливное отверстие в её горизонтальном дне за время τ. Отверстие расположено в середине дна, и его площадь во много раз меньше площади поперечного сечения ванны. При открытом сливном отверстии вода свободно (без труб) выливается на пол. Если в ванну сначала насыпать до краев мелкую гальку, а затем заполнить ванну водой, то в этом случае ванна опорожняется за время $\tau/2$. При этом камешки гальки не закрывают сливного отверстия! Через какое время опорожнится ванна, если 75% гальки убрать (то есть оставшиеся камушки будут находиться в нижней четверти ванны) и снова заполнить её водой до краёв? Вязкостью воды можно пренебречь. При решении задачи считайте, что камешки гальки уменьшают площадь поперечного сечения ванны, доступную для воды.

Возможное решение

Скорость вытекания воды через небольшое отверстие в дне зависит от уровня жидкости в ванне. Эта зависимость следует из закона сохранения механической энергии: небольшая масса воды, находившаяся в тонком верхнем слое жидкости «исчезает», а из сливного отверстия, находящегося на расстоянии h ниже, выливается такое же количество воды со скоростью V: $mgh = mV^2/2$. То есть $V = \sqrt{2gh}$ (формула Торричелли). Значит, высота уровня жидкости убывает со скоростью, которая зависит от уровня воды; при этом указанная скорость убывания уровня обратно пропорциональна площади поперечного сечения ванны S и прямо пропорциональна площади сливного отверстия s. Эта зависимость выражается уравнением, которое представляет собой условие сохранения массы вытекающей из ванны воды:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -\frac{s}{S}\sqrt{2gh}.$$

Известно, что из заполненной полностью ванны вода вытекает за время τ. Найдём за какое время вода вытечет из ванны, заполненной на четверть. Пусть $h(t)$ — зависимость высоты уровня воды от времени в этом случае $h(0) = H/4$, где H — высота ванны. Введём новые переменные $h' = 4h$, $t' = 2t$. В новых переменных

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta h'}{\Delta t'} = -\dfrac{s}{S}\sqrt{2gh'}, \\ h'(0) = H; \end{cases}$$

то есть получилось точно такое же уравнение с таким же начальным условием, как и для полностью заполненной ванны. Значит, $h' = 0$ при $t' = \tau$, то есть при $t = \frac{\tau}{2}$. Получается, что последняя четверть объёма ванны опорожняется за время $\tau/2$, если камней в ванне нет. Первые три четверти опорожняются за время $\tau - \frac{\tau}{2} = \frac{\tau}{2}$. Так как времена опорожнения ванны без камней и ванны с камнями, согласно условию, отличаются в два раза, то из записанного уравнения следует, что сечение, «занятое» водой, в ванне с камнями, равно $S/2$. Поэтому время опорожнения последней четверти ванны, если она заполнена камнями, будет равно $\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{\tau}{4}$. Время опорожнения ванны, заполненной камнями только на 25%, составит, следовательно: $\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{4} = \frac{3\tau}{4}$ (поскольку сначала площадь водного зеркала в ванне равна ш, а затем, когда уровень воды доходит до камней, площадь водного зеркала уменьшается в 2 раза).

Ответ: $3\tau/4$.

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что скорость уменьшения уровня воды пропорциональна квадратному корню из высоты уровня..1 балл
Доказано, что время опорожнения ванны, заполненной на четверть, в два раза меньше времени опорожнения полной ванны..2 балла
(если это утверждении присутствует в работе без строгого доказательства, за этот пункт ставится 1 балл, в дальнейшем баллы не снимаются!)
Найдено время опорожнения последней четверти ванны, заполненной галькой..............1 балл
Получен ответ ....1 балл