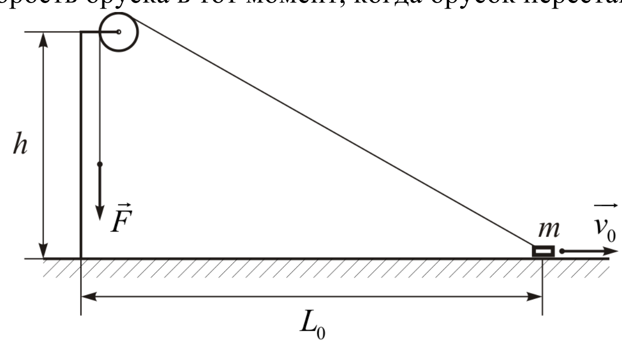
11 класс

Задача 1

Условие

Маленький брусок массой m находится на гладкой горизонтальной поверхности на расстоянии L_0 от вертикального столба, на котором на высоте h на коротком держателе закреплён маленький невесомый блок с неподвижной горизонтальной осью. Лёгкая нерастяжимая длинная нить одним концом прикреплена к бруску, перекинута через блок и натянута с постоянной силой $F > mg$. Трения в оси блока нет. В начальный момент брусок скользит по поверхности и имеет скорость v_0, направленную от столба. Какой будет скорость бруска в тот момент, когда брусок перестанет давить на поверхность?



Возможное решение

Из условия задачи ясно, что в начальный момент брусок давит на горизонтальную поверхность, то есть «оторваться» от поверхности он сможет только на обратном пути к столбу, когда расстояние L_2 станет меньше, чем L_0. Кинетическая энергия бруска изменяется, так как сила F совершает работу. Поскольку сила, действующая на брусок всегда направлена вдоль нити к блоку, то работа равна произведению величины силы на изменение длины участка нити между бруском и блоком, взятому со знаком минус.

В момент, когда брусок перестанет давить на поверхность, на брусок будут действовать только сила натяжения нити и сила тяжести. Поскольку ускорение бруска будет всё ещё направленно по горизонтали, сумма вертикальных проекций действующих на брусок сил будет равна нулю:

$$F\frac{h}{\sqrt{L_2^2+h^2}} = mg \Rightarrow \sqrt{L_2^2+h^2} = \frac{Fh}{mg}.$$

Скорость v_2 бруска в этот момент найдём из закона изменения механической энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} + F\left(\sqrt{L_0^2+h^2} - \sqrt{L_2^2+h^2}\right) = \frac{mv_2^2}{2} \Rightarrow v_2 = \sqrt{v_0^2 + \frac{2F}{m}\left(\sqrt{L_0^2+h^2} - \frac{Fh}{mg}\right)}.$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что работа силы F равна произведению величины силы на изменение длины участка нити между бруском и блоком, взятому со знаком минус ....2 балла
Найдено расстояние от блока до бруска в момент, когда брусок перестанет давить на поверхность1 балл
Записан закон изменения механической энергии .... 1 балл
Получен ответ .... 1 балл

Задача 2

Условие

Один моль жидкой воды при температуре $t_1 = 0\ °\mathrm{C}$ находится в длинном горизонтальном цилиндре, закрытом поршнем. Эту воду можно перевести в пар при температуре $t_2 = 100\ °\mathrm{C}$ двумя путями. Первый путь: сначала этому количеству воды предоставляют при $0\ °\mathrm{C}$ такой объём, что вся вода переходит в пар, то есть проводят изотермическое расширение, а затем проводят изохорный процесс, при котором водяной пар нагревают до $100\ °\mathrm{C}$. Второй путь: сначала проводят изохорное нагревание воды до $100\ °\mathrm{C}$, а затем изотермически увеличивают объём до тех пор, пока вся вода не превратится в пар. Найдите количества теплоты, которые нужно подвести к воде в первом и во втором случае.

При решении задачи можно считать, что молярная теплота испарения воды при атмосферном давлении равна $L = 40{,}7\ \text{кДж/моль}$ и не зависит от температуры. Молярная теплоёмкость жидкой воды $C = 75{,}7\ \text{Дж/(моль} \cdot \text{К)}$. Давление насыщенного пара воды при $0\ °\mathrm{C}$ равно $P_1 = 0{,}6\ \text{кПа}$, универсальная газовая постоянная $R = 8{,}31\ \text{Дж/(моль} \cdot \text{К)}$.

Возможное решение

Согласно первому началу термодинамики количество подведённой теплоты равно сумме изменения внутренней энергии и совершённой системой работы

$$Q = \Delta U + A.$$

Изменение внутренней энергии ΔU воды в этих двух разных процессах перехода в пар одинаково, так как в обоих случаях в конце получается 1 моль водяного пара при температуре $100\ °\mathrm{C}$. Отличаются только работы, совершаемые при изотермическом расширении, поэтому

$$Q_2 - Q_1 = A_2 - A_1.$$

Объём водяного пара во много раз больше объёма, занимаемого этим же количеством воды в жидком состоянии, поэтому работа, совершаемая паром при изотермическом расширении, равна

$$A_i = P_i \Delta V_i \approx \nu R T_i.$$

Рассчитаем количество теплоты, подводимое к воде во втором случае:

$$Q_2 = (C \cdot (t_2 - t_1) + L) \cdot 1\ \text{моль} \approx 48{,}3\ \text{кДж}$$

(теплота испарения включает в себя и изменение внутренней энергии и работу, которую совершает пар при увеличении объёма). Количество теплоты, подведённой в первом случае:

$$Q_1 = Q_2 - A_2 + A_1 \approx Q_2 - \nu R T_2 + \nu R T_1 = 47{,}4\ \text{кДж}.$$

Ответы. $Q_1 = 47{,}4$ кДж, $Q_2 = 48{,}3$ кДж.

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Найдено количество теплоты Q_2 .... 1 балл
Записано первое начало термодинамики .... 1 балл
Указано, что изменение внутренней энергии воды в обоих случаях одинаково .... 1 балл
Получено выражение для работы газа при изотермическом расширении $A \approx \nu RT$ .... 1 балл
Найдено количество теплоты Q_1 .... 1 балл

Задача 3

Условие

Полностью заполненная водой ванна с вертикальными боковыми стенками освобождается от воды через открытое сливное отверстие в её горизонтальном дне за время τ. Отверстие расположено в середине дна, и его площадь во много раз меньше площади поперечного сечения ванны. При открытом сливном отверстии вода свободно (без труб) выливается на пол. Если в ванну сначала насыпать до краев мелкую гальку, а затем заполнить ванну водой, то в этом случае ванна опорожняется за время $\tau/2$. При этом камешки гальки не закрывают сливного отверстия! Через какое время опорожнится ванна, если 75% гальки убрать (то есть оставшиеся камушки будут находиться в нижней четверти ванны) и снова заполнить её водой до краёв? Вязкостью воды можно пренебречь. При решении задачи считайте, что камешки гальки уменьшают площадь поперечного сечения ванны, доступную для воды.

Возможное решение

Скорость вытекания воды через небольшое отверстие в дне зависит от уровня жидкости в ванне. Эта зависимость следует из закона сохранения механической энергии: небольшая масса воды, находившаяся в тонком верхнем слое жидкости «исчезает», а из сливного отверстия, находящегося на расстоянии h ниже, выливается такое же количество воды со скоростью V: $mgh = mV^2/2$. То есть $V = \sqrt{2gh}$ (формула Торричелли). Значит, высота уровня жидкости убывает со скоростью, которая зависит от уровня воды; при этом указанная скорость убывания уровня обратно пропорциональна площади поперечного сечения ванны S и прямо пропорциональна площади сливного отверстия s. Эта зависимость выражается уравнением, которое представляет собой условие сохранения массы вытекающей из ванны воды:

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = -\frac{s}{S}\sqrt{2gh}.$$

Известно, что из заполненной полностью ванны вода вытекает за время τ. Найдём за какое время вода вытечет из ванны, заполненной на четверть. Пусть $h(t)$ — зависимость высоты уровня воды от времени в этом случае $h(0) = H/4$, где H — высота ванны. Введём новые переменные $h' = 4h$, $t' = 2t$. В новых переменных

$$\begin{cases} \dfrac{\Delta h'}{\Delta t'} = -\dfrac{s}{S}\sqrt{2gh'}, \\ h'(0) = H; \end{cases}$$

то есть получилось точно такое же уравнение с таким же начальным условием, как и для полностью заполненной ванны. Значит, $h' = 0$ при $t' = \tau$, то есть при $t = \frac{\tau}{2}$. Получается, что последняя четверть объёма ванны опорожняется за время $\tau/2$, если камней в ванне нет. Первые три четверти опорожняются за время $\tau - \frac{\tau}{2} = \frac{\tau}{2}$. Так как времена опорожнения ванны без камней и ванны с камнями, согласно условию, отличаются в два раза, то из записанного уравнения следует, что сечение, «занятое» водой, в ванне с камнями, равно $S/2$. Поэтому время опорожнения последней четверти ванны, если она заполнена камнями, будет равно $\frac{1}{2}\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{\tau}{4}$. Время опорожнения ванны, заполненной камнями только на 25%, составит, следовательно: $\frac{\tau}{2} + \frac{\tau}{4} = \frac{3\tau}{4}$ (поскольку сначала площадь водного зеркала в ванне равна ш, а затем, когда уровень воды доходит до камней, площадь водного зеркала уменьшается в 2 раза).

Ответ: $3\tau/4$.

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что скорость уменьшения уровня воды пропорциональна квадратному корню из высоты уровня .1 балл
Доказано, что время опорожнения ванны, заполненной на четверть, в два раза меньше времени опорожнения полной ванны ....2 балла
(если это утверждении присутствует в работе без строгого доказательства, за этот пункт ставится 1 балл, в дальнейшем баллы не снимаются!)
Найдено время опорожнения последней четверти ванны, заполненной галькой ....1 балл
Получен ответ ....1 балл

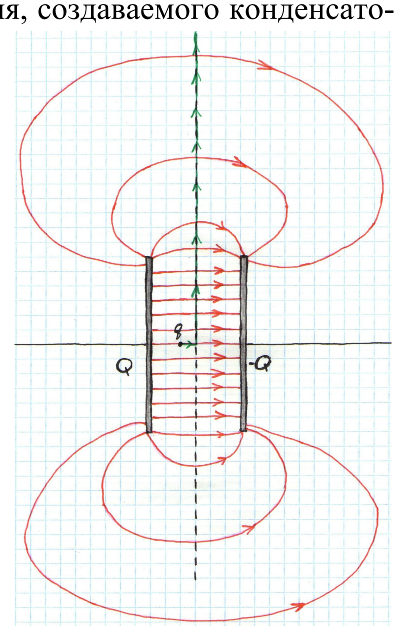
Задача 4

Условие

Плоский воздушный конденсатор обладает одинаковыми круглыми обкладками радиусом R. По обкладкам распределены заряды $+Q$ и $-Q$, а расстояние между обкладками равно d ($d \ll R$). На оси симметрии конденсатора между пластинами на расстоянии x от обкладки с зарядом $+Q$ находится частица с зарядом q, ($|q| \ll |Q|$). Найдите потенциальную энергию взаимодействия этой частицы с конденсатором, считая, что потенциальная энергия равна нулю тогда, когда частица находится на бесконечно большом расстоянии от конденсатора.

Возможное решение

Из-за краевых эффектов электростатическое поле, создаваемое конденсатором, отлично от нуля вне конденсатора. На рисунке показаны силовые линии поля, создаваемого конденсатором.



Работу, совершаемую силой, действующей со стороны конденсатора на заряд при его перемещении из начального положения на бесконечность, проще всего найти, рассматривая маршрут перемещения, обозначенный зелёными стрелками. Этот маршрут состоит из двух частей, причём на второй части (вертикальный луч) работа силы равна нулю, поскольку в каждой точке этого луча сила перпендикулярна перемещению. Работа силы на первом (горизонтальном) участке равна

$$A = qE_x\left(\frac{d}{2} - x\right),$$

где E_x — проекция электростатического поля внутри конденсатора на ось, направленную вправо. В соответствии с определением потенциальной энергии, искомая энергия равна работе A. Напряжённость поля внутри плоского конденсатора:

$$E_x = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} = \frac{Q}{\varepsilon_0 \pi R^2},$$

где S — площадь одной пластины конденсатора. Окончательно получим:

$$U = A = \frac{qQ}{\varepsilon_0 \pi R^2}\left(\frac{d}{2} - x\right).$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, что энергия взаимодействия равна работе, совершаемой полем конденсатора над частицей при перемещении её на бесконечность .... 1 балл
Учтено наличие поля вне конденсатора (например, путём выбора траектории частицы посередине между плоскостями обкладок конденсатора, чтобы перемещение частицы всегда было перпендикулярно полю) .... 1 балл
Записано выражение для напряжённости поля внутри конденсатора .... 1 балл
Получен ответ .... 2 балла

Задача 5

Условие

В фантастическом фильме описали геофизический эксперимент. Вдоль экватора проложили толстый проводник и по нему пропустили такой ток, что магнитное поле вблизи полюсов Земли стало равным нулю. Найдите силу этого тока. Индукция магнитного поля Земли над полюсами равна $6 \cdot 10^{-5}$ Тл. Радиус Земли 6370 км. Магнитная постоянная $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м.

Возможное решение

Найдём индукцию магнитного поля, создаваемого током, текущим по кольцу радиусом R на оси кольца на расстоянии R от центра. Из симметрии задачи ясно, что вектор индукции будет направлен вдоль оси кольца. Рассмотрим небольшой участок кольца длиной dl. Он находится на расстоянии $\sqrt{R^2 + R^2} = \sqrt{2}R$ от точки, где мы ищем индукцию поля. По закону Био — Савара — Лапласа индукция магнитного поля, создаваемая этим участком равна

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot dl}{2R^2},$$

причём вектор $d\vec{B}$ составляет угол $45°$ с осью кольца. Индукцию поля, создаваемого всем кольцом, найдём суммируя проекции на ось кольца полей небольших участков

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{I \cdot 2\pi R}{2R^2} \cos 45° = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{8R}.$$

Индукция поля, создаваемого кольцевым током должна быть по модулю равна индукции собственного магнитного поля Земли. Следовательно, необходимая величина силы тока

$$I = \frac{8BR}{\sqrt{2}\mu_0} \approx 1{,}7 \cdot 10^9 \text{ А.}$$

Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Записан закон Био — Савара — Лапласа....................1 балл
Найдена индукция поля, создаваемая кольцевым током....................2 балла
Индукция поля тока приравнена к индукции собственного магнитного поля....................1 балл
Получен ответ....................1 балл

Задача 6

Условие

На расстоянии $a = 10$ см от тонкой собирающей линзы находится светящийся диск радиусом $r = 1$ см, причём плоскость диска перпендикулярна главной оптической оси линзы, а его центр лежит на этой оси. За линзой на расстоянии $b = 12$ см от нее находится непрозрачный экран, параллельный линзе. Определите радиус светового пятна на экране, если фокусное расстояние линзы $f = 6$ см, а радиус линзы $x = 4$ см.

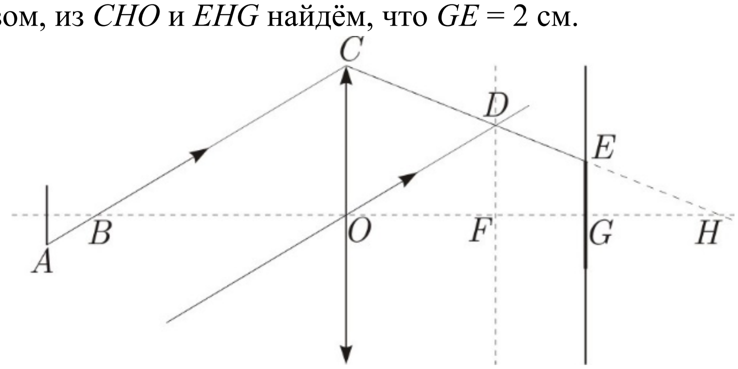
Возможное решение

Нужно понять, как идёт луч, который «отвечает» за край светлого пятна на экране. Этот луч идёт из края светящегося диска к противоположному краю линзы. Проведём луч OD, параллельный лучу BC, идущий через центр линзы. Луч через центр линзы проходит без преломления, при этом параллельные лучи собираются в фокальной плоскости линзы. Поэтому, крайняя точка, которая будет освещена на экране – это точка E.

Из подобия треугольников следует, что отрезок $BO = 4AB$ (точка A – центр светящегося диска). Поэтому $BO = 4AO/5 = 8$ см. Треугольники BOC и OFD подобны, поэтому $DF = CO \cdot OF/BO = 24/8$ см $= 3$ см.

Из подобия CHO и DHF следует равенство $DF/CO = FH/OH$, из которого найдём, что $OH = 24$ см.

Аналогичным образом, из CHO и EHG найдём, что $GE = 2$ см.



Критерии оценивания

Правильное решение оценивается в 5 баллов независимо от выбранного участником метода.

Указано, какой луч отвечает за край светлого пятна .... 1 балл
Найдена длина отрезка BO .... 1 балл
Найдена длина отрезка DF .... 1 балл
Найдена длина отрезка OH .... 1 балл
Получен ответ (длинна отрезка EG) .... 1 балл